

**HARMONISCHE FUNKTIONEN AUF
ABSTRAKTEN WIENERRÄUMEN**

von
Irene Guggenmoos-Holzmann
aus
Amberg

1977 № 307



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548225_0034

HARMONISCHE FUNKTIONEN AUF ABSTRAKTEN WIENERRÄUMEN

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Irene Guggenmoos-Holzmann
aus
Amberg



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 20.7. 1977

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatte: Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatte: Professor Dr. D. Kölzow

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
Bezeichnungen	5
1. Topologische und maßtheoretische Eigenschaften abstrakter Wierräume	
1.1. Definition eines abstrakten Wierräumcs	6
1.2. Topologische Eigenschaften	8
1.3. Maßtheoretische Eigenschaften	9
1.4. Stetigkeitseigenschaften der Halbgruppe (p_t)	12
2. Harmonische Funktionen auf einem abstrakten Wierraum (H, B, i)	
2.1. Einleitende Funktionen	15
2.2. Stetigkeitseigenschaften harmonischer Funktionen	19
3. Harmonische Funktionen auf (H, B, i) als Beispiel für eine axiomatische Potentialtheorie auf lokalbeschränkten Räumen	
3.1. Maße auf dem lokalbeschränkten Raum B	26
3.2. Bemerkungen zu den Axiomen	28
3.3. Über das Fegen von Funktionen	31
3.4. Fegen von Maßen auf einem abstrakten Wierraum	35
Literaturverzeichnis	39

Einleitung

Sowohl die axiomatische Theorie harmonischer Funktionen als auch die Potentialtheorie Markoffscher Prozesse setzt den Raum, auf dem die jeweils interessierenden Funktionenklassen definiert sind, als lokalkompakt voraus. Jedoch legen die Eigenschaften von Markoff-Prozessen mit polnischem Zustandsraum die Vermutung nahe, daß sich der $\mathbb{R}^n$ - der Raum, mit dem die klassische Potentialtheorie arbeitet - nicht nur hinsichtlich seiner Kompaktheitseigenschaften verallgemeinern läßt.

Ein in diesem Rahmen interessantes Beispiel für eine Potentialtheorie auf einem nicht lokalkompakten Raum ist die von Gross eingeführte "unendlich-dimensionale Brownsche Bewegung" auf einem abstrakten Wieneraum, deren potentialtheoretische Eigenschaften wir in dieser Arbeit sowohl aus der Wahrscheinlichkeitstheoretischen als auch aus der axiomatischen Sicht untersuchen wollen.

Auf einem separablen Hilbertraum H wird durch den projektiven Limes von Gauss-Maßen auf endlich-dimensionalen Teilräumen von H ein Promaß definiert. Gross zeigte, daß auf H eine Norm existiert, sodaß sich das Promaß zu einem σ -additiven Maß p auf die durch diese Norm erzeugten Borelmengen fortsetzen läßt. Die Vervollständigung B von H bezüglich einer derartigen Norm bezeichnete Gross als abstrakten Wieneraum (H, B, i) , wobei $i: H \rightarrow B$ die kanonische Injektion ist.

Mit Hilfe des Maßes p erhält man durch $p_t(x, A) := p(t^{-1/2}(A-x))$ ($t > 0$) eine Halbgruppe von Kernen auf $B \times \mathcal{B}(B)$, die einen Hunt-schen Prozess mit Zustandsraum B im Sinne von Blumenthal-Gettoor definiert ([13]): Die Forderung der Lokalkompaktheit des Zustandsraumes ist jedoch nur dann erfüllt, wenn H endlich-dimensional ist. In diesem Fall gilt $H=B$, die Banachraum-Topologie ist identisch mit der Hilbertraum-Topologie, und der durch die Halbgruppe definierte Prozess ist gerade der Prozess der endlich-dimensionalen Brownschen Bewegung. Ist H unendlich-dimensional, so ist die auf H eingeschränkte Topologie des Banachraumes B echt größer als die Hilbertraum-Topologie, und damit $H \subsetneq B$.

Diese unterschiedlichen topologischen Eigenschaften eines endlich-dimensionalen und eines unendlich-dimensionalen abstrakten Wienertraumes wirken sich auf die jeweiligen Halbgruppen $(p_t)_{t \geq 0}$ aus. Im endlich-dimensionalen Fall stimmt die Topologie, bzgl. der $p_t(x, \cdot)$ ein Borelmaß ist, überein mit der Topologie, für die $p_t(\cdot, A)$ stetig ist ($x \in B$, $A \in \mathcal{B}(B)$). Im unendlich-dimensionalen Fall ist zwar $p_t(x, \cdot)$ ein Borelmaß auf den durch die Banachraum-Topologie erzeugten Borelmengen; jedoch ist $p_t(\cdot, A)$ bzgl. dieser Topologie nicht stetig ([13]). Auf Grund der Konstruktion des Maßes p ist $p_t(\cdot, A)$ vielmehr stetig bzgl. einer Topologie, die von dem Hilbertraum H geprägt ist: Eine Menge U ist in dieser "H-Topologie" eine Umgebung eines Punktes $x \in B$, wenn $U - x \subset H$ eine Nullumgebung in H bzgl. der Hilbertraum-Topologie ist. Diese H-Topologie ist feiner als die Banachraum-Topologie auf B .

Im Folgenden werden wir uns nur mit unendlich-dimensionalen Wienerräumen beschäftigen. Kap. 1 gibt zunächst einen Überblick über die topologischen und maßtheoretischen Eigenschaften dieser Räume; Kap. 2 befaßt sich mit den wahrscheinlichkeitstheoretischen Folgerungen. Die Ergebnisse sind größtenteils aus den Arbeiten von Gross und Goodman bekannt. Um jedoch die Analogie und den Unterschied zur endlich-dimensionalen Brownschen Bewegung deutlich herauszuarbeiten, haben wir die funktional-analytischen Argumente, die diese Autoren zum Nachweis von Regularitätseigenschaften der Halbgruppe (p_t) benötigten, durch Methoden ersetzt, die in der Theorie der Markoff-Prozesse geläufig sind. Als Leitfaden für dieses Vorgehen diente das Buch von Dynkin ([6]).

Aus den oben kurz angedeuteten topologischen Merkmalen eines abstrakten Wienertraumes ergibt sich, daß die Halbgruppe (p_t) stark Fellersch ist im folgenden Sinn: Ist f eine p_t -meßbare Funktion, so ist $p_t f$ stetig bzgl. der H-Topologie auf B . Diese Eigenschaft bestimmt auch den über die Halbgruppe definierten Prozess: Mit Hilfe einer Technik von Priouret-Courrège ([4]) läßt sich zeigen, daß die für den Prozess harmonischen Funktionen H-stetig sind. Weiter überträgt sich diese Eigenschaft

auf Unterprozesse, die man durch Stoppen des Prozesses auf regulären Mengen erhält.

Dagegen werden die Regularitätseigenschaften der Teilmengen eines abstrakten Wienertraumes (H, B, i) nicht von der H -Topologie, sondern von der Topologie des Banachraumes B beeinflusst: Jede H -Umgebung eines Punktes $x \in B$ ist vom Potential Null; andererseits sind, wie Gross ([13]) zeigte, die Normkugeln des Banachraumes B regulär, und das Dirichletproblem ist für stetige Randfunktionen auf diesen Mengen lösbar.

Die topologische Situation wird weiter durch die über den Prozess definierte feine Topologie geklärt. Wir zeigen, daß die feine Topologie echt gröber ist als die H -Topologie.

Wir betrachten nun die bisherigen Ergebnisse aus der Sicht der axiomatischen Potentialtheorie und legen hierzu die Potentialtheorie von Bauer zugrunde.

Dank der Untersuchungen von Sondermann ([24]) über Maße auf lokalbeschränkten Räumen kann die Frage nach einer geeigneten Maßtheorie auf dem nicht lokalkompakten Raum (H, B, i) positiv beantwortet werden, denn B ist sowohl bzgl. der H -Topologie als auch bzgl. der Banachraum-Topologie ein lokalbeschränkter Raum. Über die im Folgenden benötigten Ergebnisse von Sondermann geben wir einen kurzen Überblick im ersten Abschnitt von Kap. 3.

Wie aus den Eigenschaften des Prozesses ersichtlich wird, ist die H -Topologie zu fein, um eine vernünftige Potentialtheorie auf B zu gestatten. Wir beschränken uns daher auf diejenigen harmonischen Funktionen, die stetig sind bzgl. der gröberen Banachraum-Topologie. Die Reichhaltigkeit dieses Garbendatums ist gesichert, da die stetigen Linearformen auf B harmonisch sind. Das Trennungsaxiom ist also erfüllt.

Ebenso gilt das Basisaxiom: Die Normkugeln des Banachraumes sind regulär im Sinne von Bauer ([1]).

Das Konvergenzaxiom dagegen ist, wie ein Beispiel zeigt, für die als stetig vorausgesetzten harmonischen Funktionen nicht erfüllt.

Die Möglichkeiten, Methoden der Potentialtheorie von Bauer auf den hier behandelten Fall zu übertragen, erschließen sich

am ehesten an Hand der Balayage-Theorie, in der das Konvergenzaxiom lediglich in einer abgeschwächten Form benötigt wird. Viele Sätze über das Fegen von Funktionen lassen sich mit geringfügigen Modifikationen der Beweise aus [11] übernehmen. Für die feine Topologie, die in diesem Zusammenhang untersucht werden muß, zeigen wir die aus der lokalkompakten Theorie bekannte Eigenschaft, daß jeder Punkt $x \in B$ ein feines Umgebungssystem besitzt, das in der Ausgangstopologie kompakt ist. Diese Aussage ist jedoch zu eng mit den Eigenschaften des auf dem abstrakten Wienertraum definierten Prozesses verknüpft, um eine Übertragbarkeit auf die allgemeinere Situation einer Potentialtheorie auf lokalbeschränkten Räumen zu gewährleisten. Dasselbe gilt für die Potentiale auf B : Zum Beweis des Approximationssatzes (s.[11]), zu dem im lokalkompakten Fall der Satz von Stone-Weierstraß herangezogen werden kann, mußten wir die Eigenschaften der über den Prozess definierten Green-Potentiale ausnutzen. Für den Satz über das Fegen von μ -Maßen kann man dann auf Grund der Ergebnisse von Sondermann ([24]) wieder die Beweismethode von Bauer ([1]) verwenden.

Im Hinblick auf diese Ergebnisse scheint uns der von Gross eingeführte abstrakte Wienertraum vorallem deshalb interessant zu sein, weil hier im Rahmen der Potentialtheorie eines recht unorthodoxen Prozesses immer noch Aussagen über das Konvergenzverhalten von Funktionen gemacht werden können, die im Fall einer axiomatischen Potentialtheorie auf nicht lokalkompakten Räumen wegen des Fehlens von Kompaktheitsargumenten vorläufig Schwierigkeiten bereiten.

Bezeichnungen

$(X, \|\cdot\|)$ bezeichnet einen normierten topologischen Vektorraum.

Die Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stehen - je nach Kontext - für das innere Produkt eines Hilbertraumes oder für die einer Dualität zugeordnete Bilinearform.

Ist X ein topologischer Raum, so sei $\mathcal{B}(X)$ die Menge der Borelschen Teilmengen von X .

In den wahrscheinlichkeitstheoretischen Bezeichnungen folgen wir Blumenthal/Gettoor ([2]). Auf Grund der Struktur des hier betrachteten Prozesses, der einen Vektorraum als Zustandsraum besitzt, werden wir die Übergangswahrscheinlichkeiten $P^x[X_t \in A]$ auch schreiben in der Form $P[x+X_t \in A]$, wobei $P := P^0$.

Im Zusammenhang mit Problemen der axiomatischen Potentialtheorie verwenden wir die Terminologie von Bauer ([1]).

1. Topologische und maßtheoretische Eigenschaften abstrakter Wiener Räume

1.1. Definition eines abstrakten Wiener Raumes

In einem topologischen Vektorraum E mit Dualraum E' heißt eine Menge C der Form

$$C = \{x \in E: (\langle y_1, x \rangle, \dots, \langle y_n, x \rangle) \in A\},$$

wobei $y_i \in E'$ ($1 \leq i \leq n \leq \dim E'$) und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, eine Zylindermenge. Ist E ein Hilbertraum, so läßt sich wegen der Isomorphie von E und E' eine solche Menge auch schreiben in der Form

$$C = \{x \in E: P(x) \in A\},$$

wobei P eine endlich-dimensionale Projektion ist und $n = \dim P(E)$.

Sei H ein separabler Hilbertraum. Auf den Zylindermengen von H wird durch

$$m(C) = (2\pi)^{-n} \int_A \exp[-|x|^2/2] dx$$

ein Maß definiert, wobei $n = \dim P(H)$, $C = \{x \in H: P(x) \in A\}$ und dx das n -dimensionale Lebesgue-Maß auf $P(H)$ sei. Falls H unendlich-dimensional ist, ist das additive Maß m nicht σ -additiv.

Eine Norm $\| \cdot \|$ auf H heißt meßbar, wenn zu jedem $r > 0$ eine endlich-dimensionale Projektion P_0 existiert, sodaß

$$m(\{x \in H: \|P(x)\| > r\}) < r$$

für jede zu P_0 orthogonale endlich-dimensionale Projektion P .

Die durch eine meßbare Norm auf H induzierte Topologie ist größer als die Hilbertraum-Topologie: Für die Vervollständigung B von H bezüglich dieser meßbaren Norm ist die kanonische Injektion $i: H \rightarrow B$ stetig und H liegt dicht in B - die zu i adjungierte Abbildung $i^*: B' \rightarrow H'$ ist also injektiv.

Indem man B' identifiziert mit dem Teilraum $i^*(B')$ von $H = H'$, läßt sich durch

$$\begin{aligned} p(\{x \in B: (\langle y_1, x \rangle, \dots, \langle y_n, x \rangle) \in A\}) &= \\ &= r(\{x \in H: (\langle y_1, x \rangle, \dots, \langle y_n, x \rangle) \in A\}) \end{aligned}$$

mit $y_i \in B' \subset H'$ ($1 \leq i \leq n$) und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ein Maß auf den Zylindermengen von B definieren.

Gross ([11],[13]) zeigt, daß dieses Maß p ϵ -additiv auf den Zylindermengen von B ist und wegen der Separabilität von B eine ϵ -additive Fortsetzung auf die Borelmengen von B besitzt.

Zu jedem separablen Banachraum B findet man einen separablen Hilbertraum H , der dicht liegt in B und auf dem die B -Norm im oben definierten Sinne meßbar ist [11].

Definition 1.1.1.: Ein Tripel (H,B,i) heißt abstrakter Wieneraum, wenn $(H,|\cdot|)$ ein separabler, in dem Banachraum $(B,\|\cdot\|)$ dicht liegender Hilbertraum ist, dergestalt, daß die Injektion $i:H \rightarrow B$ stetig und die auf H eingeschränkte Norm $\|\cdot\|$ meßbar ist.

Beispiele abstrakter Wieneräume

1) Der klassische Wieneraum:

Sei $B := \{f \in C([0,1]): f(0)=0\}$. Die Menge H derjenigen Funktionen f aus B , die absolutstetig sind auf $[0,1]$, bilden mit der Norm

$$\|f\|^2 := \int_0^1 (df/dt)^2 dt < \infty$$

einen Hilbertraum. Auf H wird durch $\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ eine meßbare Norm definiert ([11]). B ist isomorph zu der Vervollständigung von H bezüglich $\|\cdot\|$. p ist in diesem Fall das klassische Wienermaß.

2) Ist H ein separabler Hilbertraum mit Norm $|\cdot|$ und ist $A:H \rightarrow H$ ein injektiver Hilbert-Schmidt-Operator, so definiert

$$\|x\| := |A(x)| \quad (x \in H)$$

eine meßbare Norm ([10]).

Die Norm $|\cdot|$ eines separablen Hilbertraumes H ist wegen der orthogonalen Invarianz des Maßes m nur dann meßbar, wenn H endliche Dimension hat. Es gilt dann $B=H$.

Im Falle eines unendlich-dimensionalen abstrakten Wieneraumes ist der Hilbertraum H ein echter Teilraum des Banachraumes B .

Für jeden abstrakten Wienertraum (H, B, i) gilt die

Bemerkung 1.1.2.: Ist K ein endlich-dimensionaler Teilraum von B' und ist $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Orthonormal-Basis von K , so erhält man durch

$$P(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} \langle y_i, x \rangle y_i \quad (x \in B)$$

eine stetige lineare Abbildung $P: B \rightarrow K$. P ist dabei die stetige Fortsetzung einer orthogonalen Projektion $P_0: H \rightarrow K$, also eine Projektion auf B . Damit läßt sich B darstellen als direkte Summe

$$B = K \oplus L$$

wobei $L = \text{kern } P$.

Ist $K^\perp$ das orthogonale Komplement von K in H , so ist, da H dicht liegt in B , L der Abschluß von $K^\perp$ in B .

Die meßbare Norm $\| \cdot \|$ von B induziert auf jedem abgeschlossenen Teilraum - und damit auch auf L - wieder eine meßbare Norm. Das Tripel $(K^\perp, L, i')$ ist also ein abstrakter Wienertraum mit einem σ -additiven Maß p' auf L .

Ist nun m' die Gauss-Verteilung auf dem endlich-dimensionalen Teilraum K von B , so läßt sich das oben definierte Maß p auf B darstellen als Produktmaß von p' und m' : Denn wie man aus der Definition von p ersieht, ist jedes $z \in B'$ normalverteilt bzgl. p . Es gilt aber $z = x + y$ für ein $x \in K$ und ein $y \in K^\perp$; also ist z auch bezüglich $p' \times m'$ normal verteilt. Mittelwert und Varianz stimmen für p und $p' \times m'$ überein, woraus die Gleichheit der beiden Maße folgt. ([13])

Bei den weiteren Untersuchungen werden wir uns auf unendlich-dimensionale abstrakte Wienerträume beschränken.

1.2. Topologische Eigenschaften eines abstrakten Wienertraumes

Wie man aus der Definition 1.1.1. und den vorausgehenden Bemerkungen ersieht, läßt sich in einem abstrakten Wienertraum (H, B, i) der Dualraum B' von B identifizieren mit einem Teilraum von H . Wir werden also vereinfachend $B' \subset H' = H \subset B$ schreiben.

Aus dem vorigen Abschnitt folgt weiter, daß H dicht liegt in B ; B' ist punktstetrennend auf H , liegt also dicht in $H=H'$. Da H und damit auch B separabel ist, existiert eine abzählbare Teilmenge M von B' , die eine Orthonormalbasis für H ist und deren lineare Hülle dicht liegt in $(B, \|\cdot\|)$.

Die kanonische Injektion $i: H \rightarrow B$ ist stetig und $i(H)$ ist nicht abgeschlossen, also von 1. Kategorie in dem Baireschen Raum B . Damit liegt auch $B \setminus H$ dicht in $(B, \|\cdot\|)$.

Satz 1.2.1. (Gross [12]): Sei (H, B, i) ein abstrakter Wiener-raum. Dann existiert auf H eine zweite meßbare Norm $\|\cdot\|_1$, so daß der Abschluß K_r der Kugel $\{x \in H: \|x\|_1 \leq r\}$ in $(B, \|\cdot\|)$ für jedes $r \geq 0$ kompakt ist und $p(K_r) \geq 0$.

Korollar 1.2.2.: Die Norm-Kugel $C_r = \{x \in H: \|x\| \leq r\}$ in $(H, \|\cdot\|)$ ist kompakt in $(B, \|\cdot\|)$ für jedes $r \geq 0$.

Beweis: Sei $r \geq 0$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in C_r . C_r ist schwach kompakt. Es existiert also eine Teilfolge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in H schwach gegen ein $h \in C_r$ konvergiert. Konvergiert nun die Folge (x'_n) in B gegen ein $x \in B$, so konvergiert (x'_n) in B sowohl schwach gegen x als auch schwach gegen h , da die Dualität strikt ist und $B' \subset H$. Es folgt also $x=h$ und damit die Abgeschlossenheit von C_r in B .

Jede Topologie auf H , die von einer meßbaren Norm $\|\cdot\|_1$ erzeugt wird, ist gröber als die Hilbertraum-Topologie: es existiert also ein $M \geq 0$ mit $\|h\|_1 \leq M \cdot \|h\|$ ($h \in H$). Aus Satz 1.2.1. folgt hieraus insbesondere die Existenz einer kompakten Menge $K_{r,M}$, in der C_r enthalten ist.

1.3. Maßtheoretische Eigenschaften eines abstrakten Wiener- raumes

Auf dem abstrakten Wiener-raum (H, B, i) läßt sich mit Hilfe des rotationsinvarianten Maßes p eine Halbgruppe von Kernen wie folgt definieren:

$$p_t(x, A) := p(t^{-1/2}(A-x)) = p(t^{-1/2}(x-A)) \quad (t \geq 0, x \in B, A \in \mathcal{B}(B)).$$

Diese Halbgruppe wird später als Übergangshalbgruppe für

einen Markoffschem Prozess fungieren.

Ist f eine meßbare Funktion auf B ("meßbar" bedeute im Folgenden immer p -meßbar), so definiere man für $x \in B$

$$p_t f(x) := \int_B f(y) p_t(x, dy) = \int_B f(x+y) p_t(dy)$$

wobei $p_t(dy) = p_t(0, dy)$.

Ist f stetig und beschränkt, so ist offensichtlich auch $p_t f$ stetig und beschränkt für jedes $t > 0$.

Satz 1.3.1. (Gross [13]): Die Maße $p_t(x, \cdot)$ und $p_s(y, \cdot)$ ($s, t > 0$; $x, y \in B$) sind dann und nur dann äquivalent, wenn $s = t$ und $x-y \in H$. Andernfalls sind sie zueinander singulär.

Aus der Konstruktion des Maßes p ergibt sich dann für zwei äquivalente Maße $p_t(x, dy)$ und $p_t(x+h, dy)$ die Dichte-Funktion

$$D_h^t(y) := \exp[-1/2t(|h|^2 + 2\langle h, y \rangle)]$$

für $x, y \in B$ und $h \in H$.

Satz 1.3.2.: Für jede offene r -Kugel $K_r(x) = \{x \in B: \|x\| < r\}$ gilt $p_t(K_r(x)) = p_t(x, K_r(0)) > 0$ ($r, t > 0$, $x \in B$).

Beweis: Gelte für ein $x \in B$ und ein $r > 0$

$$p_t(K_r(x)) = 0.$$

Die Maße $p_t(\cdot)$ und $p_t(h, \cdot)$ sind wegen 1.3.1. äquivalent für alle $h \in H$, also $p_t(K_r(x) + h) = 0$. Die Familie $(K_r(x) + h)_{h \in H}$ überdeckt B . Wegen der Separabilität von B existiert eine abzählbare Teilüberdeckung $(K_r(x) + h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \in H$.

$$p_t(B) = p_t\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_r(x) + h_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} p_t(K_r(x) + h_n) = 0.$$

Aber $p_t(B) = 1$ für alle $t > 0$. Also folgt ein Widerspruch.

M.A.Piech ([21]) zeigte den folgenden Satz

Satz 1.3.3.: In einem abstrakten Wieneraum (H, B, i) findet man zu jedem $t > 0$ ein $\epsilon_t > 0$, sodaß für alle $r > 0$

$$p_t(\{x \in B: \|x\| > r\}) = \exp[-\epsilon_t r^2]$$

Als Korollare zu diesem Satz erhält man die folgenden Aussagen

1.3.4. Für jede beschränkte Menge $A \subset B$ und jedes $x \in B$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x, A) = 0.$$

Denn wegen der Beschränktheit von A existiert ein $r > 0$, sodaß $A - x \subset K_r(0)$.

$$\begin{aligned} p_t(x, A) &= p_t(A - x) \leq p_t(K_r(0)) = \\ &= p(\{y \in B: \|y\| \leq rt^{-1/2}\}) = \\ &= 1 - p(\{y \in B: \|y\| > rt^{-1/2}\}), \end{aligned}$$

also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x, A) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[-e_1 r t^{-1/2}] = 0$$

wegen 1.3.3.

1.3.5. Für alle $r > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_t(\{x \in B: \|x\| > r\}) = 0.$$

Denn $p_t(\{x \in B: \|x\| > r\}) = p(\{x \in B: \|x\| > rt^{-1/2}\})$. Die Behauptung folgt dann wie in 1.3.4.

Den Träger des Maßes p hat Kallianpur untersucht. Von ihm sind die beiden folgenden Sätze ([15]).

Satz 1.3.6.: Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H . Gilt dann für eine meßbare Funktion g auf B

$$g(x + re_n) = g(x)$$

für alle $x \in B$, $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist g p-f.s. konstant auf B .

Satz 1.3.7.: Ist M ein meßbarer Teilraum von B , so gilt

$$p(M) = 0 \quad \text{oder} \quad p(M) = 1.$$

Gilt aber $p(M) = 1$, so enthält M den Hilbertraum H .

Zum Abschluß dieses Pragraphen bringen wir noch einige Aussagen über Nullmengen.

Definition: Eine Teilmenge A von B heißt absolute Nullmenge, wenn für alle $t > 0$ und alle $x \in B$ $p_t(x, A) = 0$.

Satz 1.3.8. (Gross [13]): Der Rand jeder offenen konvexen Teilmenge von B ist eine absolute Nullmenge.

Satz 1.3.9.: Der Hilbertraum H in (H, B, i) ist eine absolute Nullmenge.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $p_t(H) = 0$ für alle $t > 0$.

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H , die in B' liegt (s.S.9).

$$X'_n := \{x \in B: |\langle x, y_i \rangle| = n, 1 \leq i \leq k_n, k_n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $X_n := X'_n \cap H$ gilt dann

$$p(X_n) = (2\pi)^{-k_n/2} \left(\int_{-n}^n \exp[-|x|^2/2] dx \right)^{k_n}.$$

Die Familie (k_n) kann so gewählt werden, daß $X_n \uparrow H$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X_n) = p(H) = p_t(H) = 0.$$

Insbesondere ist also H meßbar.

Die Funktion 1_{H-x} erfüllt für jedes $x \in B$ die Bedingung des Satzes 1.3.6., ist also p-f.s. konstant. Somit gilt entweder $p(x, H) = 0$ oder $p(x, H) = 1$. Da $p(H) = 0$, können wir voraussetzen, daß $x \notin H$. Dann aber folgt für die lineare Hülle $\langle H-x \rangle$ von $H-x$, daß $H \cap \langle H-x \rangle = \{0\}$. Also erhält man wegen Satz 1.3.7. $p_t(x, H) = p_t(H-x) \leq p_t(\langle H-x \rangle) = p(t^{-1/2} \langle H-x \rangle) = p(\langle H-x \rangle) = 0$.

1.4. Stetigkeitseigenschaften der Halbgruppe (p_t)

Im Gegensatz zur endlich-dimensionalen Brownschen Bewegung ist - wie Gross in [13] durch zwei Beispiele belegt - die Halbgruppe $(p_t(x, \cdot))$ weder stetig in x noch in t . Es gilt jedoch der

Satz 1.4.1. ([13]): Sei A eine Teilmenge von B . Ist A abgeschlossen (offen) in B , so ist die Funktion $p_t(\cdot, A): B \rightarrow \mathbb{R}$ nach oben (nach unten) halbstetig auf B . $p_t(\cdot, A)$ ist stetig, wenn A eine Borelmenge und der Rand von A eine absolute Nullmenge ist.

Beweis: Man betrachte die Funktionen $f_n(x) := \exp[-n \cdot d(x, A)]$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x \in B$, $A \subset B$ und $d(x, A) := \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

Ist A abgeschlossen, so gilt $1_A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Da der Kern p_t den Raum der stetigen beschränkten Funktionen in sich abbildet, ist mit f_n auch $p_t f_n$ stetig und beschränkt. $p_t(., A) = 1_A$ ist für abgeschlossenes A also der Limes einer absteigenden Folge stetiger Funktionen und damit nach oben halbstetig.

Ist A offen, so ist $p_t(., \bar{A})$ nach oben, also $p_t(., A) = 1 - p_t(., \bar{A})$ nach unten halbstetig.

Ist A^* eine absolute Nullmenge, so gilt

$$p_t(x, \bar{A}) = p_t(x, \check{A}) = p_t(x, A) \quad (x \in B),$$

sodaß $p_t(., A)$ sowohl nach unten als auch nach oben halbstetig ist.

Um wie im klassischen Fall eine starke Feller-Eigenschaft für die Halbgruppe $(p_t)_{t \geq 0}$ zu erhalten, führt man auf dem Banachraum B eine feinere, von der Struktur des Hilbertraumes H geprägte Topologie ein:

Definition: Eine Funktion f auf B heiße H-stetig in einem Punkt $x \in B$, wenn die Funktion

$$f_x(h) := f(x+h) \quad (h \in H)$$

stetig ist in $0 \in H$ bezüglich der Hilbertraum-Norm $|\cdot|$.

Da die Hilbertraum-Norm feiner ist als die Banachraum-Norm, ist jede auf B stetige Funktion H-stetig.

Satz 1.4.2.: Ist f eine beschränkte meßbare Funktion auf B , so ist $p_t f$ H-stetig auf B für jedes $t \geq 0$.

Beweis: Seien $x \in B$ und $h \in H$.

$$\begin{aligned} |p_t f(x+h) - p_t f(x)| &= \left| \int_B f(x+y) p_t(h, dy) - \int_B f(x+y) p_t(dy) \right| \\ &= \left| \int_B f(x+y) (D_h^t(y) - 1) p(dy) \right| \\ &\leq \|f\| \left(\int_B (D_h^t(y) - 1)^2 p(dy) \right)^{1/2} \\ &= \|f\| (\exp[|h|^2/t] - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert gegen 0 falls $|h|$ gegen 0 konvergiert.

Satz 1.4.3. (Gross [13]): Die Operatoren p_t ($t \geq 0$) bilden eine stark stetige Kontraktions-Halbgruppe auf dem Banachraum der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen auf B .

Beweis: Die Halbgruppen-Eigenschaft von $(p_t)_{t \geq 0}$ folgt wegen Bemerkung 1.1.2. und der Definition der p_t sofort aus der Halbgruppen-Eigenschaft der endlich-dimensionalen Gauss-Verteilungen m_t' mit Varianz t ($t \geq 0$).

$p_t(x, B) = 1$ für alle $x \in B$ und alle $t \geq 0$, also ist die Halbgruppe kontrahierend.

Sei nun f beschränkt und gleichmäßig stetig auf B und seien $\varepsilon, \delta > 0$ so, daß aus $\|y\| < \delta$ ($y \in B$) die Ungleichung $|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in B$ folgt.

$$\begin{aligned} |p_t f(x) - f(x)| &= \left| \int_B (f(x+y) - f(x)) p_t(dy) \right| \\ &\leq \int_{\|y\| \leq \delta} \varepsilon p_t(dy) + \int_{\|y\| > \delta} |f(x+y) - f(x)| p_t(dy) \\ &= \varepsilon + 2 \|f\| p_t(\{y \in B: \|y\| > \delta\}). \end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert wegen 1.3.5. mit t gegen 0, also ist $(p_t)_{t \geq 0}$ stark stetig.

2. Harmonische Funktionen auf einem abstrakten Wieneraum (H, B, i)

2.1. Einleitende Definitionen

Die auf einem abstrakten Wieneraum definierten Kerne p_t ($t \geq 0$) mit $p_0(x, A) := 1_A(x)$ ($x \in B, A \in \mathcal{B}(B)$) bilden eine Markoffsche Halbgruppe, und wegen 1.3.5. gilt für jedes $r > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_t(x, K_r(x)) = 0 \quad (x \in B).$$

Wie Nelson [20] und Piech [21] zeigen, existiert unter diesen Bedingungen ein Markoff-Prozess

$$(W, \underline{E}, (\underline{E}_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (\Theta_t)_{t \geq 0}, (P^x)_{x \in B})$$

mit Zustandsraum B und stetigen Pfaden $w \in W$, wobei $w: [0, \infty) \rightarrow B$ und $w(0) = 0$. Die Abbildungen $X_t: W \rightarrow B$ und $\Theta: W \rightarrow W$ sind definiert durch

$$X_t(w) := w(t) \quad (w \in W; s, t \geq 0).$$

$$\Theta_t w(s) := w(s+t)$$

$P^x(X_t \in A) := p_t(x, A)$ und wegen der Definition des Maßes p_t

$$P^x(X_t \in A) = P^0(x + X_t \in A).$$

Piech [21] zeigte weiter, daß dieser Prozess - mit Ausnahme der Lokalkompaktheit des Zustandsraumes - alle Eigenschaften eines Hunt'schen Prozesses besitzt.

Erste Austrittszeit aus einer offenen Menge $V \subset B$ bei Start in $x \in B$ heißt die durch

$$w \mapsto T_V^x(w) := \inf\{t > 0: x + X_t(w) \in V\}$$

definierte Funktion $T_V^x: W \rightarrow [0, \infty]$.

Aus der Stetigkeit der Pfade $w \in W$ folgt, daß T_V^x für jedes $x \in B$ und jede offene Teilmenge V von B eine $\underline{E}_t$ -Stopzeit ist.

Die Indizierung von T entfällt im weiteren Text, wenn dadurch keine Unklarheiten entstehen.

Definition: Eine reelle, meßbare und lokalbeschränkte Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset B$ heißt harmonisch, wenn für alle $x \in U$ und alle $r > 0$ mit $K_r(x) \subset U$ gilt:

$$f(x) = E^x[f(X_{T_r})], \quad (*)$$

wobei $T = T_{K_r}(x)$.

Ist T_r die erste Austrittszeit aus der Kugel $K_r(o)$, so wird auf den Borelmengen der Sphäre $S_r(o)$ durch

$$\pi_r^x(E) := P^x[X_{T_r} \in E] \quad (x \in K_r(o))$$

ein Maß definiert.

Mit Hilfe dieses "Treffermaßes" läßt sich dann die Bedingung (*) auch folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \int_{S_r(o)} f(y) \pi_r^x(dy).$$

Satz 2.1.1.: Sei $U \subset B$ offen. Für jede meßbare, auf $\bar{U}$ beschränkte Funktion f ist

$$u(x) := E^x[f(X_{T_U})]$$

harmonisch auf U .

Beweis: Es ist nur (*) zu zeigen. Sei $x \in U$. Man findet ein $r > 0$, sodaß $\inf_{y \in \bar{U}} \|x-y\| > r$. Wegen der Stetigkeit der Pfade folgt dann $T_{K_r}(x) < T_U$. Für $T_r = T_{K_r}(x)$ und $T = T_U$ gilt also:

$$\begin{aligned} E^x[u(X_{T_r})] &= E^x E^{X_{T_r}}[f(X_T)] \\ &= E^x[f(X_T(\theta_{T_r}))] \\ &= E^x[f(X_T)] \\ &= u(x) \end{aligned}$$

wegen der starken Markoff-Eigenschaft und Dynkin [6] Th.4.5.

Definition: Potential einer positiven meßbaren Funktion f auf B heißt die durch

$$Gf(x) := \int_0^\infty P_t f(x) dt \quad (x \in B)$$

definierte Funktion, falls dieses Integral für jedes $x \in B$

endlich ist.

Für $s > 0$ definiere man $G_s f(x) := \int_0^\infty \exp[-st] p_t f(x) dt$.

Gf ist beschränkt und H -stetig, wenn f beschränkt ist und einen beschränkten Träger besitzt:

Seien nämlich y_1, y_2, y_3 Elemente von B' , die orthonormal sind in H ; dann existiert eine Zylindermenge

$$C = \{x \in B: |\langle y_i, x \rangle| < r, i=1,2,3\},$$

die den Träger T_f von f enthält: Man wähle $r > \sup_{x \in T_f} |\langle y_i, x \rangle|$.

Ist $P: B \rightarrow \text{lin}(y_1, y_2, y_3)$ die kanonische Projektion, so gilt gemäß 1.1.2. mit dem dort konstruierten Raum L

$$C \times L - x = (C - P(x)) \times L$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_t f(x) dt &= \|f\| \int_0^\infty p_t (T_f - x) dt \\ &= \|f\| \int_0^\infty m'_t (C - P(x)) dt \\ &= 1/4\pi \|f\| \int_{C-P(x)} 1/|y| dy \end{aligned}$$

wobei dy das Lebesgue-Maß auf $\text{lin}(y_1, y_2, y_3)$ ist. Aus der endlich-dimensionalen Theorie folgt die Beschränktheit des letzten Ausdrucks.

Da also insbesondere $p_t(T_f - x)$ Lebesgue-meßbar ist (als Funktion von t) und $p_t f(x+h) \leq \|f\| \cdot p_t(T_f - x)$ für $h \in H$, folgt aus 1.4.2. und dem Satz von der majorisierten Konvergenz die H -Stetigkeit von Gf .

Satz 2.1.2. ([13]): Sei f eine beschränkte meßbare Funktion auf B mit beschränktem Träger T_f . Dann ist Gf harmonisch im Komplement von T_f .

Beweis: Sei $V \subset B$ offen und sei T die erste Austrittszeit aus V . Wegen obiger Bemerkung ist $Gf(x)$ endlich für alle $x \in B$:

$$\begin{aligned} Gf(x) &= \int_0^\infty p_t f(x) dt = E^x \left[\int_0^\infty f(X_t) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^T f(X_t) dt \right] + E^x \left[\int_T^\infty f(X_t) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^T f(X_t) dt \right] + E^x \left[\int_0^\infty f(X_t(\theta_T)) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^T f(X_t) dt \right] + E^x E^{X_T} \left[\int_0^\infty f(X_t) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^T f(X_t) dt \right] + E^x [Gf(X_T)] \end{aligned}$$

wegen der starken Markoff-Eigenschaft.

Liegt V im Komplement des Trägers T_f , so verschwindet der erste Term und es folgt die Behauptung.

Definition: Ein Randpunkt x einer beschränkten offenen Menge $V \subset B$ heißt regulär, wenn für die erste Austrittszeit T aus V bei Start in x gilt:

$$p^x[T = 0] = 1.$$

Der Randpunkt x heißt stark regulär, wenn im Komplement von V eine Kugel $K_r(y)$ mit $y \in V$ und $r > 0$ existiert, sodaß der Durchschnitt von V mit der abgeschlossenen konvexen Hülle $\text{conv}(K_r(y), x)$ von x und $K_r(y)$ leer ist.

Eine offene Teilmenge V von B heißt regulär (stark regulär), wenn jeder Randpunkt von V regulär (stark regulär) ist.

Die Norm-Kugeln in B sind stark regulär und wegen dem folgenden Satz sogar regulär.

Satz 2.1.3. ([13]): Jede stark reguläre Teilmenge von B ist regulär.

Der Beweis verläuft wie im endlich-dimensionalen Fall.

Gross ([13]) zeigt nun, daß das Dirichlet-Problem lösbar ist für stark reguläre Mengen V und stetige Funktionen auf V^* . Dieser Beweis von Gross läßt sich noch etwas verallgemeinern:

Satz 2.1.4.: Sei $U \subset B$ stark regulär und sei f eine beschränkte, meßbare und H -stetige Funktion auf U^* . Dann gilt für

$$u(x) := E^x[f(X_T)] \quad (x \in B, T=T_U)$$

und für alle $a \in U^*$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0, a+h \in U} u(a+h) = f(a).$$

Beweis: Sei $a \in U^*$ und sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in H gegen 0 kon-

vergierende Folge. a ist regulärer Punkt für die stark reguläre Menge U . Da die erste Austrittszeit aus einer stark regulären Menge bei Start in $x \in P^{X_0}$ f.s. stetig ist in jedem $x_0 \in B$ (Gross [13]), gilt also

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} T_{a+h} = T_a \quad P^a\text{-f.s.},$$

da aus der f.s.-Stetigkeit von T_x die f.s.-H-Stetigkeit folgt.

Liegt nun die Folge $(a+h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U , so konvergiert sie gegen a während wegen der f.s.-Stetigkeit der Austrittszeit und wegen der Stetigkeit der Pfade $(X_{T_{a+h_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ P^a -f.s. gegen X_0 konvergiert. Also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u(a+h_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E^{a+h_n}[f(X_{T_{a+h_n}})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E^0[f(a+h_n+X_{T_{a+h_n}})] = \\ &= E^0[\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_{T_{a+h_n}} + a + h_n)] = \\ &= E^0[f(a+X_0)] = \\ &= f(a). \end{aligned}$$

2.2. Stetigkeitseigenschaften harmonischer Funktionen

Wie das folgende Beispiel zeigt, sind harmonische Funktionen auf einem abstrakten Wieneraum nicht notwendig stetig bzgl. der B -Topologie (Goodman [10]):

Sei K eine konvexe, kompakte, symmetrische Menge mit $p(K) > 0$. Die Existenz einer solchen Menge folgt aus 1.2.1. Für $L := \bigcup_{r>0} rK$ gilt dann $p(L) = 1$.

Man wähle nun ein $h \in H$ so, daß $K-h$ zum Nullpunkt einen positiven Abstand hat. Wegen 2.1.2. ist das Potential der Funktion 1_{K-h} dann harmonisch in einer Umgebung von 0.

$G1_{K-h}(0) > 0$, denn aus $p_t(K) = p(t^{-1/2}K) > 0$ folgt $G1_K > 0$ und wegen der Äquivalenz der Maße $p_t(\cdot)$ und $p_t(h, \cdot)$ auch $G1_{K-h} > 0$.

B ist ein Bairescher Raum und K ist keine Umgebung der Null

in B; es existiert also ein $x \in B \setminus L$ mit

$$(K - rx) \cap L = \emptyset \quad (r > 0).$$

Hieraus folgt $p_t(K - rx) = 0$ für alle r, t und damit

$$G1_{K-h}(rx) = \int_0^\infty p_t(h, K - rx) dt = 0$$

wegen 1.3.1. für alle $r > 0$. Also

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} G1_{K-h}(rx) \neq G1_{K-h}(0) > 0.$$

Im Falle der endlich-dimensionalen Brownschen Bewegung folgen die Stetigkeitseigenschaften der harmonischen Funktionen aus der Stetigkeit der Kerne $p_t(., A)$ ($t > 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Wir zeigen nun, daß analog für abstrakte Wiener Räume gilt: Harmonische Funktionen sind H-stetig.

Lemma 2.2.1.: Sei V eine offene Menge in B und sei T die erste Austrittszeit aus V . Dann gilt für jede Teilmenge U von V mit $\bar{U} \subset V$

$$\lim_{t \rightarrow 0} p^x[T \leq t] = 0 \quad (x \in B)$$

gleichmäßig auf U .

Beweis: Sei $t > 0$. Man findet ein $r > 0$, sodaß der Abstand von U zum Komplement von V größer ist als r .

$$\begin{aligned} \{w \in W: T_x(w) \leq t\} &\subset \bigcup_{0 \leq s \leq t} \{w \in W: x + X_s(w) \in K_r(x)\} \\ &= \bigcup_{0 \leq s \leq t} \{w \in W: X_s(w) \in K_r(0)\} =: A_t \end{aligned}$$

für alle $x \in U$.

Es genügt zu zeigen, daß $p^x(A_t)$ auf U gleichmäßig gegen 0 konvergiert, falls $t \rightarrow 0$.

Man betrachte die Funktion

$$T'(w) := \begin{cases} \inf\{s: s \leq t, X_s(w) \in K_r(0)\} & w \in A_t \\ t & w \notin A_t \end{cases}$$

T' ist eine Stopzeit für den Prozess und $x + X_{T'}(w) \in V$ für alle $x \in U$, da die Pfade stetig sind.

$$\begin{aligned} A_t &\subset \{w: \|X_t(w) - X_0(w)\| \geq r/2\} \cup \{w: \|X_{T'}(w) - X_t(w)\| \geq r/2\} \\ \text{denn } \|X_{T'}(w) - X_t(w)\| &\geq \|X_{T'}(w) - X_0(w)\| - \|X_t(w) - X_0(w)\| \\ &\geq r - r/2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $x \in U$ und $K := K_{r/2}(0)$

$$\begin{aligned} P^X(A_t) &\leq p_t(K) + P^X[\|X_T - X_t\| \geq r/2] \\ &= p_t(K) + E^X[p_{T-t}(K)] \end{aligned}$$

wegen der starken Markoff-Eigenschaft (s. [19]). Die letzte Summe konvergiert gegen 0 unabhängig von x , woraus die Behauptung folgt.

Satz 2.2.2.: Für jede beschränkte meßbare Funktion f auf B ist die Funktion

$$p'_t f(x) := E^X[1_{T \geq t} f(X_t)] \quad (t \geq 0, x \in B)$$

H-stetig auf U , wenn T die erste Austrittszeit aus einer offenen Teilmenge U von B ist.

Beweis: Da $\{T \geq t\} \subset \{\theta_t T = T - t\}$ für $t \geq 0$, gilt für jedes $u \in (0, t]$:

$$1_{T \geq u} \theta_u (1_{T \geq t-u} f(X_{t-u})) = 1_{T \geq t} f(X_t),$$

woraus mit der starken Markoff-Eigenschaft folgt:

$$\begin{aligned} p'_t f(x) &= E^X[1_{T \geq u} \theta_u (1_{T \geq t-u} f(X_{t-u}))] \\ &= E^X[\theta_u (1_{T \geq t-u} f(X_{t-u}))] - E^X[1_{T \leq u} \theta_u (1_{T \geq t-u} f(X_{t-u}))] \\ &= E^X E^{X_u}[1_{T \geq t-u} f(X_{t-u})] - E^X(1_{T \leq u} E^{X_u}[1_{T \geq t-u} f(X_{t-u})]) \\ &= E^X[p'_{t-u} f(X_u)] - E^X[1_{T \leq u} p'_{t-u}(X_u)] \\ &= p_u p'_{t-u} f(x) - E^X[1_{T \leq u} p'_{t-u}(X_u)]. \end{aligned}$$

$p'_{t-u} f$ ist meßbar und beschränkt, also ist $p_u p'_{t-u} f$ wegen 1.4.2. H-stetig.

$$E^X[1_{T \leq u} p'_{t-u} f(X_u)] \leq 2 \|f\| P^X[T \leq u].$$

$P^X[T \leq u]$ konvergiert wegen 2.2.1. mit u gleichmäßig auf U gegen 0. Damit ist $p'_t f$ H-stetig auf U .

Mit Hilfe einer Methode von Priouret/Courrège [4] kann man nun den folgenden Satz zeigen.

Satz 2.2.3.: Sei f eine beschränkte meßbare Funktion auf B mit beschränktem Träger T_f und sei T die erste Austrittszeit aus $\overset{\circ}{T}_f$. Dann ist

$$u(x) = E^x[f(X_T)] \quad (x \in B)$$

H-stetig auf $\overset{\circ}{T}_f$.

Beweis: Es soll gezeigt werden, daß

$$E^x[f(X_T)] = E^x\left[\int_0^\infty f(X_t) \cdot \exp[-t] dt\right]$$

auf U gleichmäßiger Limes der H-stetigen Funktionen

$$u_s(x) := E^x\left[\int_0^\infty f(X_{t/s} + \theta_{t/s} \cdot X_T) \cdot \exp[-t] dt\right]$$

für $s > 0$ und $s \rightarrow \infty$ ist:

$$\begin{aligned} u_s(x) &= E^x\left[\int_0^\infty \exp[-t] \cdot f(\theta_{t/s} \cdot X_T) dt\right] \\ &= E^x\left[s \int_0^\infty \exp[-st] \cdot f(\theta_{t/s} \cdot X_T) dt\right] \\ &= s \int_0^\infty \exp[-st] E^x E^{X_t}[f(X_T)] dt \\ &= G_s(E^x[f(X_T)]). \end{aligned}$$

Also ist u_s wegen 1.4.2. H-stetig auf B .

$$E^x[f(X_T)] - u_s(x) = E^x\left[\int_0^\infty \exp[-t] \cdot (f(X_T) - f(\theta_{t/s} \cdot X_T)) dt\right].$$

Da $T = t/s + \theta_{t/s} \cdot T$ für $T \geq t/s$, folgt für $x \in B$

$$\begin{aligned} |E^x\left[\int_0^\infty \exp[-t] \cdot (f(X_T) - f(\theta_{t/s} \cdot X_T)) dt\right]| \\ \leq 2\|f\| \int_0^\infty \exp[-t] \cdot P^x[T \leq t/s] dt \\ \leq P^x[T \leq a/s] \cdot s \cdot \int_0^a \exp[-st] dt + s \cdot \int_a^\infty \exp[-st] dt \\ \leq P^x[T \leq a/s] + \exp[-sa]. \end{aligned}$$

Wegen 2.2.1. konvergiert diese Summe gleichmäßig auf jeder Teilmenge von T_f , also folgt die Behauptung.

Korollar 2.2.4.: Für jede beschränkte Menge U in B ist $E^x[T_U]$ beschränkt und H-stetig auf B .

Beweis: Man wähle eine Funktion $f: B \rightarrow [0,1]$ mit beschränktem

Träger $T_f \supset U$ und $f=1$ auf U .

$$E^X[T_U] = E^X\left[\int_0^T 1_U(X_t) dt\right] = E^X\left[\int_0^T f(X_t) dt\right].$$

Da aus $t < T$ folgt: $X_t \in U$ und damit $f(X_t)=1$.

$$\begin{aligned} E^X\left[\int_0^T f(X_t) dt\right] &= E^X\left[\int_0^\infty f(X_t) dt\right] - E^X\left[\int_0^\infty p_t f(X_{T_U}) dt\right] \\ &= Gf(x) - E^X[Gf(X_{T_U})]. \end{aligned}$$

Gf ist beschränkt wegen der Beschränktheit von f und T_f , also ist auch $E^X[Gf(X_{T_U})]$ beschränkt. Wegen 1.4.2. und 2.2.3. sind beide Funktionen H -stetig.

Wie bei der endlich-dimensionalen Brownschen Bewegung übertragen sich die Stetigkeitseigenschaften des Prozesses auch auf jeden Unterprozess, den man durch Stoppen auf einer offenen Teilmenge von B erhält ([21]):

Satz 2.2.5.: Sei V eine offene Teilmenge von B . Dann bildet die Familie $(p'_t)_{t \geq 0}$, definiert durch

$$p'_t f(x) := E^X[f(X_t) 1_{t < T}] \quad (x \in B, T=T_V)$$

eine Kontraktions-Halbgruppe auf dem Banachraum der beschränkten meßbaren Funktionen. Diese Halbgruppe ist stark stetig auf dem Raum der beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen, deren Träger in V enthalten ist.

Beweis: Sei f beschränkt und meßbar auf B . Die Halbgruppeneigenschaft zeigt man wie üblich:

$$\begin{aligned} p'_{t+s} f(x) &= E^X[f(X_{t+s}) 1_{T > t+s}] \\ &= E^X[f(\theta_s \circ X_t) 1_{T > s} \cdot \theta_s \cdot 1_{T > t}] \\ &= E^X[1_{T > s} E^{X^s}[f(X_t) 1_{T > t}]] \\ &= p'_s p'_t f(x). \end{aligned} \quad (x \in B)$$

Ist f beschränkt und gleichmäßig stetig auf B mit $T_f < \infty$, so folgt

$$\begin{aligned} |p'_t f(x) - f(x)| &\leq |E^X[1_{T > t}(f(X_t) - f(x))]| + |f(x)| |E^X[1_{T > t} - 1]| \\ &\leq E^X[|f(X_t) - f(x)|] + |f(x)| |E^X[1_{T \leq t}]|. \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert gleichmäßig auf B mit t gegen 0.

Da f gleichmäßig stetig ist, gilt $|f(x)| < r$ falls $d(x, V) < r'$ für entsprechende $r, r' > 0$ und alle $x \in B$. Auf der Menge $\{x \in V: d(x, V) \geq r'\}$ konvergiert $E^x[1_{T \leq t}]$ wegen 2.2.1. gleichmäßig gegen 0. Damit ist $(p'_t)_{t \geq 0}$ stark stetig.

Setzt man V als beschränkt voraus, so gilt

$$G^V 1(x) := \int_0^\infty p'_t 1(x) dt = E^x \left[\int_0^{T_V} 1(x_t) dt \right] < \infty.$$

Die für den Prozess exzessiven Funktionen lassen sich dann lokal wie gewohnt behandeln (s. Dynkin [6], II).

Mit Hilfe einer Modifikation topologischer Eigenschaften konnten bisher die grundlegenden Methoden einer Wahrscheinlichkeitstheoretischen Potentialtheorie in Analogie zur Brownschen Bewegung nachvollzogen werden. Daß die speziellen Stetigkeits- und Meßbarkeitseigenschaften dennoch Folgen haben, die im Widerspruch zu klassischen Ergebnissen stehen, zeigt eine Betrachtung der feinen Topologie.

Wie üblich heißt eine Menge $A \subset B$ fein offen, wenn für alle $x \in A$ gilt: $P^x[T_A > 0] = 1$.

Da H eine Menge vom Potential Null ist (1.3.9.), liegt $B \setminus H$ fein dicht in B. Die Menge $K := \{h \in H: |h| < 1\}$ ist eine offene H-Umgebung von 0 und es gilt $K \cap B \setminus H = \emptyset$. Die feine Topologie ist also nicht feiner als die H-Topologie. Daß die feine Topologie sogar echt gröber als die H-Topologie ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 2.2.6.: Zu jedem $x \in B$ und zu jeder B-Umgebung V von x existiert eine in B kompakte Menge $K \subset V$ und eine H-Umgebung U von x, die im feinen Innern von K enthalten ist.

Beweis: Sei $x \in B$. Aus 1.2.1. folgt die Existenz einer meß-

baren Norm $\|\cdot\|_1$ auf H , sodaß für ein beliebiges $r > 0$ der Abschluß K_r der Menge $\{h \in H: \|h\|_1 \leq r\}$ bzgl. der B -Norm in B kompakt ist und $p(x, x+K_r) = p(K_r) > 0$.

Wir zeigen, daß x ein fein-innerer Punkt von $x+K_r$ ist; d.h. $p^{x+K_r}[T_{x+K_r} > 0] = p[T_{K_r} > 0] = 1$.

$$p[T_{K_r} = 0] = \lim_{t \rightarrow 0} p[T_{K_r} \leq t].$$

Für alle $t > 0$ gilt

$$p[T_{K_r} \leq t] \leq p[X_t \in (K_r)] = p_t((K_r)) = 1 - p_t(K).$$

Wegen des 0-1-Gesetzes von Kallianpur (1.3.7.) gilt aber $\lim_{t \rightarrow 0} p_t(K_r) = 1$. Also ist x ein fein-innerer Punkt von K_r .

Die durch eine meßbare Norm erzeugte Topologie ist gröber als die H -Topologie. Man findet also ein $r' > 0$, sodaß $K_{r'}^H(0) = \{h \in H: \|h\| \leq r'\}$ enthalten ist in K_r . Für alle Punkte $h \in K_{r'}^H(0)$ folgt wegen $p_t(K_r) > 0$ aus 1.3.1.

$p_t(h, K_r) > 0$. Mit demselben Beweis wie oben zeigt man nun, daß $K_{r'}^H(0)+x$ enthalten ist im feinen Inneren von K_r+x . Da die Norm $\|\cdot\|_1$ feiner ist als die B -Norm, folgt die Behauptung.

Die Tatsache, daß die feine Topologie gröber ist als die H -Topologie folgt also im Wesentlichen daraus, daß der Prozess einerseits stetige Pfade, andererseits aber auf B unstetige Übergangswahrscheinlichkeiten $p_t(\cdot, dy)$ besitzt.

3. Harmonische Funktionen auf (H, B, i) als Beispiel für eine axiomatische Potentialtheorie auf lokalbeschränkten Räumen

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung harmonischer Funktionen, die stetig sind bzgl. der Norm-Topologie auf B . Auf diese Topologie beziehen sich, wenn nicht anders vermerkt, auch alle weiteren Aussagen über die Stetigkeit einer Funktion.

Wir wollen untersuchen, inwieweit (i) die stetigen harmonischen Funktionen auf einem abstrakten Wieneraum den Axiomen einer Potentialtheorie im Sinne von Bauer ([1]) genügen, und (ii), auf welche Weise Sätze aus einer solchen Theorie auf unseren Fall übertragbar sind.

Die erste Schwierigkeit liegt hierbei in der Wahl einer geeigneten Maßtheorie auf dem unendlich-dimensionalen Banachraum B , d. h. einer Theorie, die der Maßtheorie auf lokalkompakten Räumen möglichst weitgehend entspricht. Sondermann ([24]) hat in seiner Dissertation dieses Problem in einer allgemeinen Form für lokalbeschränkte Räume gelöst. Die hier benötigten Resultate von Sondermann seien kurz aufgeführt.

3.1. Maße auf dem lokalbeschränkten Raum B

Man betrachte den Raum $C_{bb}(B)$ der stetigen beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger in B . $C_{bb}(B)$ läßt sich darstellen als induktiver Limes der mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf A versehenen Räume $C_b(A)$ stetiger beschränkter Funktionen auf A , wobei A die beschränkten Teilmengen von B durchläuft. Die hierdurch auf $C_{bb}(B)$ definierte Topologie werde mit $\tau_{b,u}$ bezeichnet.

Eine Linearform μ auf $C_{bb}(B)$ heißt ein Maß auf B , wenn μ im ordnungstheoretischen Dualraum von $C_{bb}(B)$ liegt. Wie Sondermann zeigt, ist diese Definition äquivalent mit der Forderung, daß μ stetig sei bzgl. $\tau_{b,u}$.

Ein Maß μ auf B heißt

- a) σ -stetig, wenn für jede absteigende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{bb}(B)$ mit $g_n \rightarrow 0$ gilt: $\mu(g_n) \rightarrow 0$;
 b) τ -stetig, wenn für jedes absteigend filtrierende System $(g_i)_{i \in I} \subset C_{bb}(B)$ mit $g_i \rightarrow 0$ gilt: $\mu(g_i) \rightarrow 0$.

Auf polnischen Räumen - also auch auf B - folgt aus der σ -Stetigkeit eines Maßes die τ -Stetigkeit ([24]).

Der Träger eines τ -stetigen Maßes ist eindeutig definiert und es gilt: Ist der Träger eines Maßes μ beschränkt, so ist μ beschränkt ([24]).

Die folgenden Eigenschaften eines τ -stetigen Maßes finden sich ebenfalls in der Arbeit von Sondermann:

- 1) Ist H eine aufsteigend filtrierende Teilmenge von $C_{bb}(B)$, und $\sup_{g \in H} \mu(g) < \infty$, so gilt für $h := \sup_{g \in H} g$

$$\mu(h) = \sup_{g \in H} \mu(g).$$
- 2) μ läßt sich unter Beibehaltung seiner Stetigkeitseigenschaften fortsetzen auf den Raum derjenigen stetigen und halbstetigen Funktionen, deren Maß endlich ist. Für diese Funktionen gelten die Sätze von Lebesgue und Fatou, sowie der Satz von der monotonen Konvergenz.
- 3) μ ist auf der σ -Algebra der Borelschen Teilmengen von B regulär bzgl. der äußeren Approximation mit offenen und der inneren Approximation mit abgeschlossenen beschränkten Mengen.

Wie auf lokalbeschränkten Räumen kann man auch auf einem lokalbeschränkten uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ Maße definieren als stetige Linearformen auf dem Raum $C_{bb}^u(X)$ der gleichmäßig stetigen beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger, und es gilt:

Satz 3.1.1. ([24]): Jedes τ -stetige Maß auf $(X, \mathcal{U})$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer τ -stetigen Linearform auf $C_{bb}^u(X)$ - also zu einem τ -stetigen Maß auf X fortsetzen.

Eine Folge von Maßen μ_n ($n \in \mathbb{N}$) auf B heißt vag konvergent gegen ein Maß μ , wenn $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ für alle $f \in C_{bb}(B)$.

- 4) Die vage Topologie auf dem Raum M der Maße ist gerade die schwache Topologie bzgl. der Dualität $\langle M, C_{bb}(B) \rangle$.

3.2. Bemerkungen zu den Axiomen

Um die Terminologie der in [1] anzupassen, ändern wir die bisherigen Definitionen folgendermaßen ab:

Definition: Sei f eine auf einer offenen Menge $U \subset B$ definierte meßbare numerische Funktion, die π_r^x -integrierbar ist für jedes $x \in U$ und jedes $r \geq 0$ mit $K_r(x) \subset U$.

f heißt nahezu-harmonisch, wenn gilt

- 1) f ist lokal beschränkt
- 2) $f(x) = E^x[f(x_{T_{K_r}(x)}})]$

für alle $x \in U$ und alle $r \geq 0$ mit $K_r(x) \subset U$.

f heißt harmonisch, wenn es nahezu-harmonisch und stetig ist.

f heißt nahezu-superharmonisch, wenn gilt

- 1) f ist lokal nach unten beschränkt
- 2) $f(x) \geq E^x[f(x_{T_{K_r}(x)}})]$

für alle $x \in U$ und alle $r \geq 0$ mit $K_r(x) \subset U$.

f heißt superharmonisch, wenn f nahezu-superharmonisch und nach unten halbstetig ist.

$\mathcal{H}_U$ bzw. $\mathcal{S}_U$ bezeichne den Raum der harmonischen bzw. superharmonischen Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset B$.

Eine Menge $V \subset B$ heiße regulär, wenn sie stark regulär im bisherigen Sinne ist.

Für eine reguläre Menge V und eine beschränkte stetige Randfunktion f ist wegen 2.1.4. das Dirichlet-Problem lösbar, und die Dirichlet-Lösung ist positiv, falls $f \geq 0$. V ist also regulär im Sinne von [1], wenn dort statt der relativen Kompaktheit die Beschränktheit von V gefordert wird.

Untersuchen wir nun die Gültigkeit der Axiome:

1) Das Basisaxiom ist erfüllt, da die Norm-Kugeln von B wegen 2.1.3. regulär sind. Aus der Separabilität folgt sogar die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie aus regulären Mengen.

2) Das Trennungsaxiom ist auf Grund des folgenden Hilfssatzes ebenfalls erfüllt.

Lemma 3.2.1.: Ist f eine stetige reelle Funktion auf B, die für alle $x \in B$ und alle $t \geq 0$ der Gleichung

$$p_t f(x) = f(x) \quad (+)$$

genügt, so ist f harmonisch auf B.

Beweis: Es gilt wegen (+) für alle $x \in B$, $s \geq 0$

$$f(x) = s \int_0^\infty \exp[-st] p_t f(x) dt. \quad (++)$$

Sei $x \in B$ und sei U eine offene Umgebung von x, auf der $M \geq 0$ eine Schranke von f ist. T sei die erste Austrittszeit aus U.

Aus (++) folgt

$$\begin{aligned} (1/s)f(x) &= \int_0^\infty \exp[-st] p_t f(x) dt \\ &= E^x \left[\int_0^\infty \exp[-st] f(X_t) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^T \exp[-st] f(X_t) dt \right] + E^x \left[\int_T^\infty \exp[-st] f(X_t) dt \right]. \end{aligned}$$

Für den letzten Term folgt dann aus der starken Markoff-Eigenschaft

$$\begin{aligned} E^x \left[\int_T^\infty \exp[-st] f(X_t) dt \right] &= \\ &= E^x \left[\exp[-sT] \int_0^\infty \exp[-st] f(X_t(\theta_T)) dt \right] \\ &= E^x \left[\exp[-sT] E^{X_T} \left[\int_0^\infty \exp[-st] f(X_t) dt \right] \right] \\ &= (1/s) E^x \left[\exp[-sT] f(X_T) \right] \end{aligned}$$

Also

$$f(x) = s E^x \left[\int_0^T \exp[-st] f(X_t) dt \right] + E^x \left[\exp[-sT] f(X_T) \right]$$

für alle $s \geq 0$. Da der erste Summand majorisiert wird durch $M \cdot E^x [1 - \exp[-sT]]$ und T wegen 2.2.4. P^x -f.s. beschränkt ist für die o.B.d.A. beschränkte Menge U, strebt für $s \rightarrow 0$ die Summe gegen $E^x [f(X_T)]$.

Für jedes $l \in B'$ gilt

$$p_t l(x) = l(x) + \int_B l(y) p_t(dy) \quad (x \in B).$$

l ist normalverteilt bzgl. p_t , besitzt also insbesondere den Mittelwert o , sodaß l der Gleichung (+) genügt.

Die Konstanten auf B sind harmonisch und B' ist verschränkt punktstetig. Somit erfüllen bereits die harmonischen Funktionen das Trennungsaxiom.

3) Das Konvergenzaxiom ist nicht erfüllt: Das folgende Beispiel zeigt die Existenz einer Folge harmonischer Funktionen, deren obere Einhüllende nahezu-harmonisch und unstetig ist.

Beispiel: Sei wie in 1.2.1. K eine kompakte symmetrische konvexe Teilmenge von B mit $p(K) \succ o$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Menge

$$U_n := \{x \in B: d(x, K) < 1/n\};$$

Aus der Konvexität von U_n folgt wegen 1.3.8., daß U_n eine absolute Nullmenge ist. Also ist wegen 1.4.1. $p_t(., U_n)$ stetig auf B .

Man wähle ein $h \in H$, sodaß $d(o, U_1 - h) \succ o$ und definiere

$$f_n(x) := 1_{U_n - h}(x) \quad (x \in B, n \in \mathbb{N}).$$

$Gf_n(x) = \int_0^\infty p_t(x, U_n - h) dt$ ist dann für jedes n nahezu-harmonisch in einer Umgebung von o (2.1.2.) und wegen der Stetigkeit von $p_t(., U_n - h)$ sogar stetig, also harmonisch.

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Gf_n(x) = G1_{K-h}(x) \quad (x \in B).$$

Wie das Beispiel zu Beginn von Abschnitt 2.2. zeigt, ist aber $G1_{K-h}$ unstetig in o .

Aus 2.1.1. und dem Satz von Lebesgue folgt, daß die obere Einhüllende h einer Folge nahezu-harmonischer Funktionen nahezu-harmonisch ist, falls h lokal beschränkt ist.

3.2.2. Da das Konvergenzaxiom nicht gilt, ist für eine superharmonische Funktion $s \in \mathfrak{S}_U$ die Abbildung

$$x \mapsto E^x[s(X_{T_V})]$$

für eine reguläre Menge $V \subset U$ nur dann harmonisch, wenn $s|_V$ stetig ist; sonst ist sie superharmonisch und nahezu-harmonisch.

3.3. Über das Fegen von Funktionen

Dieser Abschnitt soll einen Einblick geben in die Möglichkeiten, Aussagen der axiomatischen Potentialtheorie von Bauer zu übertragen auf den Fall harmonischer Funktionen auf einem abstrakten Wiener Raum. Dabei werden wir nur den Teil der Theorie betrachten, der sich mit dem Fegen von Funktionen und Massen befaßt - wobei auch die feine Topologie und die Eigenschaften von Potentialen angesprochen werden.

Auf Grund der Gültigkeit des Basis- und des Trennungsaxioms lassen sich die meisten der hier benötigten Sätze mit leicht modifizierten Beweisen aus [1] übernehmen, da das Konvergenzaxiom höchstens in Form seiner abgeschwächten Folgerung 3.2.2. benötigt wird. Für die Art der Beweistechnik geben wir ein Beispiel und verweisen im übrigen auf die Beweise von Bauer.

Sätze, für deren Beweis in [1] Eigenschaften lokalkompakter Räume herangezogen werden (z. B. Approximationssatz und Aussagen über die feine Topologie), können mit den früher eingeführten wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden bewiesen werden.

Definition: Sei f eine positive numerische Funktion auf B , die auf einer Menge $E \subset B$ von einer superharmonischen Funktion majorisiert wird. Die Funktion

$$R_f^E := \inf \{ s \in {}_+ \mathcal{P}_B : s \geq f \text{ auf } E \}$$

heißt die Reduzierte von f bzgl. E . Auf E Gefegte von f heißt die Regularisierte $\hat{R}_f^E$ von R_f^E .

Wie in [1] zeigt man:

Ist f superharmonisch, so gilt $0 \leq \hat{R}_f^E \leq R_f^E \leq f$ und $R_f^E(x) = f(x)$ für alle $x \in E$. Außerdem ist für jede reguläre Menge $V \subset B$ die Funktion

$$f_V(x) := \begin{cases} E^x[f(X_{T_V})] & x \in V \\ f(x) & x \in V^c \end{cases}$$

superharmonisch auf B .

Ist f positiv, so gilt $f_V = \hat{R}_f^V = R_f^V$.
 f_V ist wegen 3.2.2. nahezu-harmonisch auf V .

Die Sätze in [1], II §1 und 2 können ohne Schwierigkeiten direkt übernommen werden, wenn man die Beweise im Rahmen der

bisher verwendeten Theorie abändert. Wir geben hierfür ein Beispiel:

Satz [1]: Die Regularisierte $\hat{s}$ einer nahezu-superharmonischen Funktion s ist superharmonisch auf B , und es gilt für $x \in B$

$$\hat{s}(x) = \sup_{V \text{ regulär}, x \in V} E^X[s(X_{T_V})].$$

Beweis: Da s lokal nach unten beschränkt ist, gilt $\hat{s}(x) \geq -\infty$ für alle $x \in B$.

$$\begin{aligned} \hat{s}(x) &= \liminf_{y \rightarrow x} s(y) \geq \liminf_{y \rightarrow x} E^Y[s(X_{T_Y})] \\ &\geq E^0[\liminf_{y \rightarrow x} s(X_{T_Y} + y)] \\ &= E^X[s(X_{T_V})]. \end{aligned}$$

Damit ist $\hat{s}$ superharmonisch.

Auf jeder regulären Menge ist die Abbildung $x \rightarrow E^X[s(X_{T_V})]$ wegen 3.2.2. superharmonisch, also $E^X[s(X_{T_V})] \leq \hat{s}(x)$ und somit

$$\hat{s}(x) \geq \sup_{V \text{ regulär}, x \in V} E^X[s(X_{T_V})].$$

Sei $x \in B$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a < \hat{s}(x)$. Man findet eine Umgebung $U(x)$, sodaß $a < \hat{s}(y)$ für alle $y \in U(x)$. Für jede reguläre Menge V mit $x \in V \subset U(x)$ und für die konstante Funktion $h = a$ folgt dann

$$a = h(x) = E^X[h(X_{T_V})] \leq E^X[\hat{s}(X_{T_V})] \leq E^X[s(X_{T_V})],$$

und damit die Behauptung.

Definition: Eine positive superharmonische Funktion p auf B heißt ein Potential, wenn o die größte harmonische Minorante von p ist.

Für jede positive beschränkte nach unten halbstetige Funktion f mit beschränktem Träger T_f ist die Funktion

$$Gf := \int_0^\infty p_t \, f \, dt$$

ein Potential: Die Superharmonizität folgt aus dem Beweis von 2.1.2.; und da für alle $t \geq 0$ $p_t(x, T_f) \rightarrow 0$ falls $\|x\| \rightarrow 0$, ist o die größte harmonische Minorante.

Im Folgenden sei P^C der Raum der stetigen Potentiale auf B . P_G^C bezeichne den Teilraum derjenigen stetigen Potentiale, die im Bild des Operators G liegen.

Satz 3.3.1.: P_G^C ist verschränkt punktstetig auf B .

Beweis: Seien $x, y \in B$. Es existiert eine Umgebung $V(o)$ der Null, sodaß $y-x+V(o) \cap V(o) = \emptyset$. Für $V(x) := x+V(o)$ und $V(y) := y+V(o)$ gilt dann $V(x) \cap V(y) = \emptyset$.

Wegen der Normalität von B existiert eine stetige beschränkte Funktion f , deren Träger in $V(o)$ enthalten ist.

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= f(z-x) \\ f_2(z) &:= f(z-y) \end{aligned} \quad (z \in B)$$

f_1, f_2 sind stetig und es gilt $T_{f_1} \subset V(x), T_{f_2} \subset V(y)$.

Wir zeigen $Gf_1(x) \cdot Gf_2(y) \neq Gf_1(y) \cdot Gf_2(x)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } Gf_1(x) &= \int_0^\infty \int_B f_1(x+z) p_t(dz) dt = \int_0^\infty \int_B f(z) p_t(dz) dt = \\ &= \int_0^\infty \int_B f_2(y+z) p_t(dz) dt = Gf_2(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Gf_1(y) &= \int_0^\infty \int_B f_1(y+z) p_t(dz) dt = \int_0^\infty \int_B f(z) p_t(y-x, dz) dt = \\ &= \int_0^\infty \int_B f_2(x+z) p_t(dz) dt = Gf_2(x). \end{aligned}$$

wegen der Rotationsinvarianz von p_t .

Zu zeigen ist also $Gf(o) \neq Gf(y-x)$.

Der Träger der Funktion $f_3(z) := f(z+(y-x))$ ist enthalten in $V(o)+y-x$, und $y-x+V(o) \cap V(o) = \emptyset$. Es folgt also

$$Gf(o) = \int_0^\infty \int_B f(z) p_t(dz) dt \neq Gf(y-x) = \int_0^\infty \int_B f_3(z) p_t(dz) dt.$$

Satz 3.3.2.: Ist $f \geq 0$ eine stetige beschränkte Funktion mit beschränktem Träger T_f , so ist P_f ein stetiges reelles Potential auf B , das im Komplement von T_f harmonisch ist.

Der Beweis verläuft wie in [1]. Man hat nur zu beachten, daß für jede konvexe Umgebung U von T_f das Potential $G1_U$ stetig und strikt positiv auf T_f ist. R_f ist harmonisch auf $\bar{T}_f$, da es dort nahezu-harmonisch und stetig ist.

Definition: Feine Topologie auf B heißt die grösste Topologie, für die alle superharmonischen Funktionen auf B stetig sind.

Aus dieser Definition folgt sofort, daß eine Menge $U \subset B$ feine Umgebung eines Punktes $x \in B$ ist, wenn eine auf U definierte superharmonische Funktion s existiert, sodaß

$$s(x) < \liminf_{y \rightarrow x, y \notin U} s(y).$$

Lemma 3.3.3.: Zu jedem $x \in B$ gibt es eine für die Norm-Topologie kompakte Menge K , die feine Umgebung von x ist.

Beweis: Sei $x \in B$. Man wähle eine kompakte Menge K_r wie im Beweis von 2.2.6. und eine offene Umgebung U von $K := x + K_r$. Dann ist G_1^U ein nach unten halbstetiges Potential und somit superharmonisch.

Für $y \in U \setminus K$ gilt: $U \setminus K - y$ ist eine offene Umgebung von o , also $p_t(y, U \setminus K) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$ wegen 1.3.5.

Andererseits gilt für x : $p_t(x, U \setminus K) = p_t(U \setminus x) - p_t(K_r)$. Da $\lim_{t \rightarrow 0} p_t(K_r) = 1$, konvergiert $p_t(x, U \setminus K)$ mit t gegen 0 , und es folgt die Behauptung mit

$$\liminf_{y \rightarrow x, y \notin U} G_1^{U \setminus K}(y) > G_1^{U \setminus K}(x)$$

aus obiger Bemerkung.

Satz 3.3.4.: Jeder Punkt $x \in B$ besitzt ein fundamentales feines Umgebungssystem, das kompakt ist für die Norm-Topologie auf B .

Beweis ([3]): Sei $x \in B$ und sei V eine fein-offene Umgebung von x . Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}$ und eine superharmonische Funktion s auf einer Umgebung von x , sodaß

$$\liminf_{y \rightarrow x, y \notin U} s(y) > a > s(x).$$

Sei K_r wie im vorigen Lemma. Man wähle $r > 0$ so, daß s auf $x + K_r$ definiert ist, und $s > a$ auf $x + K_r \setminus V$. Dann erfüllt

$$U_a = \{y \in x + K_r : s(y) \leq a\} \quad (a \in \mathbb{R})$$

die Forderungen.

Mit den bisher untersuchten Begriffen lassen sich nun die beiden folgenden Sätze wie in [1] beweisen.

Satz 3.3.5.: Für jede Menge $E \subset B$ und beliebige Funktionen $u, v \in {}^{\infty}_+ \mathcal{F}_B$ gilt

$$R_{u+v}^E = R_u^E + R_v^E$$

$$\hat{P}_{u+v}^E = \hat{P}_u^E + \hat{P}_v^E.$$

Satz 3.3.6.: Für jede isotone Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von B und jede auf $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ endliche superharmonische Funktion s gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} R_s^{E_n} = P_s^E$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \hat{R}_s^{E_n} = \hat{P}_s^E.$$

3.4. Fegen von Maßen auf einem abstrakten Wienerraum

Mit Hilfe der in Abschnitt 3.1. referierten Maßtheorie von Sondermann ([24]) läßt sich die Methode von Bauer ([11]) auf Maße auf dem lokalbeschränkten Raum B übertragen. Dabei ersetzen wir den Approximationssatz durch die nachstehenden beiden Hilfssätze.

Lemma 3.4.1.: Zu jeder gleichmäßig stetigen beschränkten Funktion g mit beschränktem Träger und zu jedem $a > 0$ existiert eine gleichmäßig stetige Funktion f , sodaß Gf gleichmäßig stetig ist und $|Gf - g| < a$.

Beweis: Sei $a > 0$. Zu $\varepsilon = a/(1+2\|f\|)$ existiert ein δ , so daß $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ falls $\|x-y\| < \delta$.

Für $f_n := (g - p_n g)/n$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt dann

$$\begin{aligned} |Gf_n(x) - g(x)| &= |(1/n) \int_0^n \int_B (g(x+y) - g(x)) p_t(dy) dt| \\ &\leq (1/n) \int_0^n \int_{K_\delta(0)} |g(x+y) - g(x)| p_t(dy) dt + \\ &\quad + (1/n) \int_0^n \int_{V_\delta(0)} |g(x+y) - g(x)| p_t(dy) dt \\ &< (1/n) \cdot \varepsilon \int_0^n P_t(K_\delta(0)) dt + (1/n) \cdot 2\|g\| \int_0^n P_t(V_\delta(0)) dt. \end{aligned}$$

Wegen 1.3.5. existiert zu ε ein n_0 , sodaß für alle $n \leq n_0$ der zweite Summand kleiner als $(1/n) \cdot 2 \|g\| \cdot \varepsilon$ wird. Es gilt also für diese n

$$\|Gf_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon + 2 \|g\| \cdot \varepsilon = a.$$

Sei wieder a beliebig und so, daß $\|g(x) - g(y)\| \leq a/n$ ($n \in \mathbb{N}$) für $x, y \in B$ mit $\|x - y\| \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Gf_n(x) - Gf_n(y)\| &\leq \int_0^n \|p_t g(x) - p_t g(y)\| dt \\ &\leq \int_0^n \int_B \|g(x+z) - g(y+z)\| p_t(dz) dt \\ &\leq \frac{a}{n} \cdot n = a. \end{aligned}$$

Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ Gf_n gleichmäßig stetig.

Lemma 3.4.2.: Sei f eine positive gleichmäßig stetige beschränkte Funktion mit beschränktem Träger $T_f \subset B$. Dann existieren zu jedem $a > 0$ zwei gleichmäßig stetige Potentiale p und q , sodaß

- 1) $T_{p-q} \subset T_f$
- 2) $\|f - (p-q)\| \leq a$.

Beweis: Man betrachte die Menge $A := \{x \in B: f(x) \geq a/3\}$. Aus dem vorigen Lemma folgt die Existenz einer Funktion u , sodaß Gu gleichmäßig stetig ist und $\|f - (2a/3) - Gu\| \leq a/3$. $Gu = Gu^+ - Gu^-$, und $Gu^+ \leq Gu^-$ auf dem Rand von A . Die Funktionen

$$p := \begin{cases} Gu^+ & \text{auf } A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$q := \inf(p, Gu^-)$$

sind positiv, gleichmäßig stetig und superharmonisch, und, da $p = Gu^+$, sogar Potentiale. $p = q$ auf A und $\|f - (p-q)\| \leq a$.

Für den Satz über das Fegen von Maßen kann man nun den Beweis aus [1] benutzen:

Satz 3.4.3.: Sei $\mu \geq 0$ ein σ -stetiges Maß auf B mit beschränktem Träger. Dann existiert zu jeder Menge $E \subset B$ genau ein Maß μ^E auf dem uniformen Raum $(B, \|\cdot\|)$, sodaß

$$\int p d\mu^E = \int_R^E p d\mu$$

für alle gleichmäßig stetigen Potentiale $p \in C_b(B)$.

Beweis: Wegen 3.4.1. und 3.4.2. liegt $D := (P^C - P^C) \cap C_{bb}^u(B)$ im Raum $C_{bb}^u(B)$ der gleichmäßig stetigen beschränkten Funktionen mit beschränktem Träger dicht. Zu jeder beschränkten Menge $A \subset B$ findet man ein $d \in D^+$, sodaß $d \geq 0$ auf A : Sei $r \geq 0$ so, daß $A \subset K_r(o)$; dann wähle man etwa $d = p - p_{K_r}(o)$ mit $p := G^1_{K_r}(o)$.

Somit läßt sich jede positive stetige Linearform auf D zu einer positiven stetigen Linearform auf C_{bb}^u und weiter wegen 3.1.1. zu einem Maß auf B fortsetzen.

Sei E eine Teilmenge von B . Gilt für ein $d \in D$ $d = p - q = p' - q'$, so folgt $p + q' = p' + q$ und damit wegen 3.3.5. $\hat{R}_p^E + \hat{R}_q^E = \hat{R}_{p'}^E + \hat{R}_{q'}^E$.

Da $\hat{R}_f^E$ ($f \in P^C$) majorisiert wird durch f , ist es integrierbar und es gilt

$$\int (\hat{R}_p^E - \hat{R}_q^E) d\mu = \int (\hat{R}_{p'}^E - \hat{R}_{q'}^E) d\mu$$

Durch $\mu_o(d) := \int (\hat{R}_p^E - \hat{R}_q^E) d\mu$ wird also in eindeutiger Weise eine positive Linearform auf D definiert, die zu einem Maß

$$\mu^E \text{ auf } B \text{ mit} \quad \int (p - q) d\mu^E = \int (\hat{R}_p^E - \hat{R}_q^E) d\mu \quad (p - q \in D)$$

fortgesetzt werden kann.

Sei $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine gegen B aufsteigende Folge regulärer Mengen. Dann ist für jedes gleichmäßig stetige Potential $p \in \{p_{V_n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine nach unten gerichtete Familie gleichmäßig stetiger Potentiale mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} p_{V_n} = 0$ und $p = p_{V_n}$ im Komplement der Menge V_n .

$p - p_{V_n}$ liegt also in D für jedes $n \in \mathbb{N}$ und

$$(*) \quad \int p d\mu^E - \int p_{V_n} d\mu^E = \int \hat{R}_p^E d\mu - \int \hat{R}_{p_{V_n}}^E d\mu.$$

Da $\hat{R}_{p_{V_n}}^E \leq p_{V_n}$, ist mit μ auch μ^E ein σ -stetiges Maß und es gilt

$$0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int p_{V_n} d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int p_{V_n} d\mu^E = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{R}_{p_{V_n}}^E d\mu.$$

Aus (*) folgt dann die Behauptung.

Bemerkung: Jedes Potential $p = Gf$ mit $f \in C(B)$ ist Supremum gleichmäßig stetiger Potentiale Gg ($g \in C_{bb}^u$, $g \leq f$). Es gilt also für alle derartigen Potentiale p

$$\int p d\mu^E = \int \hat{R}_p^E d\mu.$$

Um zu zeigen, daß diese Gleichung für beliebige stetige Potentiale $g \in P^C$ gilt, ist es nötig, wieder die Theorie der Markoff-Prozesse heranzuziehen: Wie in [6], II, Theorem 12.4. zeigt man, daß jede stetige superharmonische Funktion auf B exzessiv ist bzgl. der Halbgruppe (p_t) .

Jedes Potential $g \in P^C$ ist damit exzessiv, also auch die durch

$$q_n := \min(q, nG1_{K_n(o)}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierten stetigen Potentiale. Für diese Potentiale gilt

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_t q_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$); somit ist jedes q_n obere Einhüllende der Funktionen Gq_{nm} mit $q_{nm} := 1/m(q_n - p_m q_n)$ ([6], II, Th. 12.1.).

Man erhält also

$$q = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} Gq_{nm}.$$

Da jede positive superharmonische Funktion auf B das Supremum stetiger Potentiale ist, ergibt sich also wie in [1]

$$\int u d\mu^E = \int \hat{R}_u^E d\mu$$

für alle $u \in \tilde{J}_B$.

Speziell erhält man nun für jede reguläre Menge V und $x \in V$ das Treffermaß $\tau_{x,V} := P^x[X_{T_V} \in A] \quad (A \subset V^*)$ als das zu V und dem Punktmaß ε_x gehörige gefegte Maß: Dies folgt wegen $\hat{R}_{\varepsilon_x}^V = u_V$ ($u \in \tilde{J}_B$) aus $\int \hat{R}_u^V d\varepsilon_x = \hat{R}_u^V(x) = u_V(x) = E^x[u(X_{T_V})]$.

Bemerkung: Die beiden folgenden Sätze über gefegte Maße lassen sich auf Grund der Ergebnisse von Sondermann ([24]) aus der lokalkompakten Theorie übertragen (s. [1]):

- 1) Sei (E_n) eine isotone Folge von Teilmengen von B und E deren Vereinigung. Für jedes ε -stetige positive Maß μ auf B strebt dann (μ^{E_n}) vag gegen μ^E .
- 2) Ist (μ_n) eine isotone Folge ε -stetiger Maße auf B , die vag gegen ein Maß μ mit beschränktem Träger konvergiert, so ist für jede Menge $E \subset B$ μ^E der vage Limes der Folge (μ_n^E) .

Literatur

- [1] H.BAUER: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Springer LN 22, Berlin, 1966
- [2] R.M.BLUMENTHAL/R.K.GETTOOR: Markov Processes and Potential Theory. Academic Press, New York 1968
- [3] C.CONSTANTINESCU/A.CORNEA: Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer 1975, Berlin
- [4] P.COURREGE/P.PRIOURET: Axiomatique du Problème de Dirichlet et Processus de Markov. Séminaire Brelot-Choquet-Deny 1963/64 No. 8
- [5] R.M.DUDLEY/J.FELDMAN/L.LE CAM: On Seminorms, Probabilities, and Abstract Wiener spaces. Ann. of Math. (2) 93 (1971) 390-408
- [6] E.B.DYNKIN: Markov Processes I/II. Springer 1965, Berlin
- [7] J.FELDMAN: Equivalence and Perpendicularity of Gaussian Processes. Pacific J. Math, 8 (1958) 699-708
- [8] V.GOODMAN: Harmonic Functions on Hilbert Space. J. Functional Analysis 10(1972) 451-470
- [9] V.GOODMAN: A Divergence Theorem for Hilbert Space. TAMS 164 (1972) 411-426
- [10] L.GROSS: Integration and Nonlinear Transformations in Hilbert Space. TAMS 94 (1960) 404-440
- [11] L.GROSS: Measurable Functions on Hilbert Space. TAMS 105 (1962) 372-390
- [12] L.GROSS: Abstract Wiener Spaces, in Proc. Fifth Berkeley Symposium on Math., Statistics and Probability (1965) 31-42
- [13] L.GROSS: Potential Theory on Hilbert Space. J. Functional Analysis 1 (1967) 123-181
- [14] L.GROSS: Abstract Wiener Measure and Infinite Potential Theory. Springer LN 140 "Lectures in Modern Analysis and Applications II.
- [15] G.KALLIANPUR: Zero-One Laws for Gaussian Processes. TAMS 146 (1970) 199-211
- [16] G.KALLIANPUR: Abstract Wiener Processes and Their Reproducing Kernel Hilbert Spaces.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete

17 (1971) 113-123

- [17] J.KUELBS: Abstract Wiener Spaces and Applications to Analysis. Pacific J. Math. 31 (1969) 433-450
- [18] J.KUELBS: Gaussian Measures on a Banach Space. J. Functional Analysis 5 (1970) 354-367
- [19] P.A.MEYER: Processus de Markov. Springer LN 26, Berlin 1967
- [20] E.NELSON: An Existence Theorem for Second Order Parabolic Equations. TAMS 88 (1958) 414-429
- [21] M.A.PIECH: Some Regularity Properties of Diffusion Processes on Abstract Wiener Space. J. Functional Analysis 8 (1971) 153-172
- [22] H.SATO: Gaussian Measures on a Banach Space and Abstract Wiener Spaces. Nagoya Math. J. 36 (1969) 65-83
- [23] L.A.SHEEP/H.J.LANDAU: On the Supremum of a Gaussian Process. Sankhya Ser. A 32 (1970) 369-378
- [24] D.SONDERMANN: Maße auf lokalbeschränkten Räumen. Ann. Fourier XIX,2 (1970) 32-113

Lebenslauf

9.2.48 geboren in Amberg als Tochter des prakt. Arztes
Dr. med. Herbert Guggenmoos und seiner Frau
Dr. med. Luise, geb. Frisch

1954-58 Besuch der Volksschule in Ulm

1958-66 Besuch des humanistischen Gymnasiums in Ulm

1966 Abitur

1966-74 Studium der Mathematik an der Universität
Erlangen-Nürnberg

1969 Diplom-Vorprüfung für Mathematik
Anstellung als stud. Hilfskraft am Mathematischen
Institut

1969/70 Studienaufenthalt an der Universität Strasbourg

1971 Diplom-Prüfung an der Universität Erlangen-
Nürnberg im Fach Mathematik

1972-74 Stipendium im Rahmen des Graduierten-Förderungs-
Gesetzes

seit 74 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut
für Med. Statistik und Dokumentation,
Studium der Medizin an der Universität
Erlangen-Nürnberg.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hagi, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990